MATEMATRIX
LECȚII DE MATEMATICĂ
PRÊT-À-PORTER

Capitolul	Mulțimea numerelor reale
Unitatea de învățare	Puteri și radicali: puteri cu exponenți naturali, întregi, raționali și iraționali (reali)

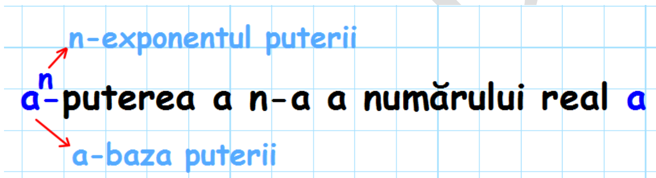
Breviar teoretic

Puteri cu exponent natural

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ se definește puterea n a numărului real a ca fiind

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{de\ n\ ori\ a}.$$

Citim ” a la puterea n”.



Cazuri particulare:

$$0^n = \underbrace{0 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 0}_{de\ n\ ori\ 0} = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$1^n = \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1}_{de\ n\ ori\ 1} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Datorită asociativității înmulțirii numerelor reale, puterea cu exponent natural a numărului real a se poate defini recursiv:

$$a^{n+1} = a^n \cdot a = a \cdot a^n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Prin convenție: $a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{R}^*$.

Atenție! Nu se definește 0^0!

Observație: Foarte utilizate, mai ales în calculele de la fizică, sunt puterile cu exponent natural ale lui 10.

$$10^1 = 10$$

$$10^2 = 100$$

$$10^3 = 1000$$

...

$$10^n = \underbrace{100 \ldots \ldots \ldots \ldots 0}_{cifra\ 1\ și\ n\ cifre\ 0}$$

Exemplu: Prin scrierea $1{,}25 \cdot 10^5$ înțelegem 125000, ceea ce înseamnă mutarea virgulei numărului 1,25, către dreapta, după 5 cifre (primele cinci zecimale ale numărului 1,25 sunt 2,5,0,0,0).

Observație: Foarte utilizate, mai ales în calculele de la fizică, sunt puterile cu exponent întreg negativ ale lui 10.

$$10^{-1} = \frac{1}{10}$$

$$10^{-2} = \frac{1}{100}$$

$$10^{-3} = \frac{1}{1000}$$

...

$$10^{-n} = \frac{1}{\underbrace{100 \ldots \ldots \ldots \ldots 0}_{cifra\ 1\ și\ n\ cifre\ 0}}$$

Exemplu: Prin scrierea $375 \cdot 10^{-5}$ înțelegem $0{,}00375$, ceea ce înseamnă mutarea virgulei numărului 375, către stânga, după 5 cifre (numărul 375 este număr întreg, deci virgula se consideră după cifra unităților: 375,000...).

Puteri cu exponent întreg

Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ și $a \in \mathbb{R}^*$atunci $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. (putere cu baza a și cu exponent întreg negativ)

Exemple:

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$

b) $\left(-\sqrt{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\sqrt{5}\right)^3} = \frac{1}{-5\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{25}$

Puteri cu exponent rațional

Teoremă:
Pentru fiecare număr $\boldsymbol{a} \geq \mathbf{0}$ și pentru fiecare număr natural $\boldsymbol{n} \geq \mathbf{2}$, ecuația $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{a}$ are o unică soluție pozitivă.

Observație: Teorema afirmă că există un singur număr mai mare sau egal ca 0 a cărui putere a n-a este egală cu un număr pozitiv dat, $a \geq 0$.

Această soluție unică are două notații posibile:

$\boldsymbol{a}^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[n]{\boldsymbol{a}}$
Notația permite introducerea noțiunii de putere cu exponent rațional a unui număr pozitiv, iar ulterior a noțiunii de putere cu exponent real a unui număr strict pozitiv.	Notația permite introducerea noțiunii de radical de ordin $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{n} \geq \mathbf{2}$ și studierea unor proprietăți și a operațiilor cu radicali.

Cele două notații pentru unica soluție a ecuației date conduc la egalitățile:

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \forall a \geq 0$

$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ și $a \geq 0$ - numărul $a^{\frac{1}{n}}$ verifică ecuația dată (este soluție a ecuației).

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a, n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ și $a \geq 0$ - numărul $\sqrt[n]{a}$ verifică ecuația dată (este soluție a ecuației).

Dacă $a = 0$, unica soluție a ecuației $x^n = 0$ este $x = 0$, deci:

$$0^{\frac{1}{n}} = 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad \text{sau} \quad \sqrt[n]{0} = 0, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

În prezentul breviar teoretic vom folosi notația $a^{\frac{1}{n}}$ pentru a introduce puterea cu exponent rațional, respectiv cu exponent real, a unui număr **strict pozitiv**.

Definiție:

Fie $\boldsymbol{a} > 0$ și $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}, \boldsymbol{n} \geq \mathbf{2}$. Numărul notat $\boldsymbol{a}^{\frac{m}{n}}$ definit prin

$$\boldsymbol{a}^{\frac{m}{n}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\boldsymbol{a}^{\frac{1}{n}}\right)^{\boldsymbol{m}} = (\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{m}})^{\frac{1}{n}},$$

se numește puterea cu exponent rațional $\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}$ a numărului strict pozitiv $\boldsymbol{a}$.

Dacă $\frac{m}{n} > 0$, atunci putem defini și $0^{\frac{m}{n}} \stackrel{\text{def}}{=} 0$.

Atenție! Nu putem defini puteri numărului 0 cu exponenți mai mici sau egali cu 0.

Dacă $a = 1$, atunci $1^{\frac{m}{n}} = 1, m, n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$.

Operații cu puteri cu exponenți raționali și proprietăți

Dacă a și b sunt numere strict pozitive, atunci:

1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}, \forall p, q \in \mathbb{Q}$
2. $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, \forall p, q \in \mathbb{Q}$
3. $(a^p)^q = a^{p \cdot q}, \forall p, q \in \mathbb{Q}$
4. $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p, \forall p \in \mathbb{Q}$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}, \forall p \in \mathbb{Q}$

Exemple:

1. Calculează: $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 3^6 - \frac{6^4}{24^2} \cdot 2^3 + 4^{-3} : 2^{-12} - \left(\sqrt{5}^3\right)^2$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 3^6 - \frac{6^4}{24^2} \cdot 2^3 + 4^{-3} : 2^{-12} - \left(\sqrt{5}^3\right)^2 =$$

$$= 3^{-3} \cdot 3^6 - \frac{(2 \cdot 3)^4}{(2^3 \cdot 3)^2} \cdot 2^3 + \frac{(2^2)^{-3}}{2^{-12}} - \sqrt{5}^6 =$$

$$= 3^{-3+6} - \frac{2^4 \cdot 3^4}{2^6 \cdot 3^2} \cdot 2^3 + 2^{-6-(-12)} - 5^3 =$$

$$= 3^3 - 2^{4+3-6} \cdot 3^{4-2} + 2^6 - 125 =$$

$$= 27 - 2 \cdot 3^2 + 64 - 125 =$$

$$= 27 - 18 + 64 - 125 = -52$$

2. Demonstrează egalitatea: $\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-3}-b^{-3}}-\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}}=-\frac{2a^{-1}b^{-1}}{a^{-4}+(ab)^{-2}+b^{-4}}$

$$\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-3}-b^{-3}}-\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-3}+b^{-3}}=$$

$$=\frac{a^{-1}-b^{-1}}{(a^{-1})^3-(b^{-1})^3}-\frac{a^{-1}+b^{-1}}{(a^{-1})^3+(b^{-1})^3}=$$

$$=\frac{a^{-1}-b^{-1}}{(a^{-1}-b^{-1})[(a^{-1})^2+a^{-1}b^{-1}+(b^{-1})^2]}-\frac{a^{-1}+b^{-1}}{(a^{-1}+b^{-1})[(a^{-1})^2-a^{-1}b^{-1}+(b^{-1})^2]}=$$

$$=\frac{1}{(a^{-1})^2+a^{-1}b^{-1}+(b^{-1})^2}-\frac{1}{(a^{-1})^2-a^{-1}b^{-1}+(b^{-1})^2}=$$

$$=\frac{(a^{-1})^2-a^{-1}b^{-1}+(b^{-1})^2-(a^{-1})^2-a^{-1}b^{-1}-(b^{-1})^2}{[(a^{-2}+b^{-2})+a^{-1}b^{-1}]\cdot[(a^{-2}+b^{-2})-a^{-1}b^{-1}]}=$$

$$=\frac{-2a^{-1}b^{-1}}{(a^{-2}+b^{-2})^2-(a^{-1}b^{-1})^2}=$$

$$=\frac{-2a^{-1}b^{-1}}{a^{-4}+2a^{-2}b^{-2}+b^{-4}-a^{-2}b^{-2}}=\frac{-2a^{-1}b^{-1}}{a^{-4}+a^{-2}b^{-2}+b^{-4}}$$

3. Calculează: $\frac{(\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}}}{3^{-\frac{7}{6}}}$

Pentru efectuarea operațiilor, vom transforma numitorul în putere cu bază $\sqrt{3}$, pentru a obține raport de puteri cu aceeași bază:

$$\frac{(\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}}}{3^{-\frac{7}{6}}}=\frac{(\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}}}{\left(\sqrt{3}^2\right)^{-\frac{7}{6}}}=\frac{(\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}}}{(\sqrt{3})^{-\frac{7}{3}}}=(\sqrt{3})^{-\frac{2}{3}-\left(-\frac{7}{3}\right)}=(\sqrt{3})^{\frac{5}{3}}=(\sqrt{3})^{2\cdot\frac{5}{6}}=\left(\sqrt{3}^2\right)^{\frac{5}{6}}=3^{\frac{5}{6}}.$$

Compararea puterilor, cu exponent rațional, ale unui număr strict pozitiv

Fie $a>0, a\neq 1$.

Dacă $\underbrace{a\in(0,1)}_{bază\ subunitară}$, atunci $p\leq q \Leftrightarrow a^p\geq a^q$. (ordinea între puterile cu exponent rațional ale unui număr pozitiv și subunitar se schimbă între exponenți).

Dacă $\underbrace{a \in (1,\infty)}_{bază\ supraunitară}$, atunci $p \leq q \Leftrightarrow a^p \leq a^q$. (ordinea între puterile cu exponent rațional ale unui număr pozitiv și subunitar se păstrează între exponenți).

Exemple:

1. Scrieți numerele $a = (\sqrt{7})^{\frac{2}{3}}; b = \frac{1}{7^{-\frac{1}{5}}}$; $c = 49^{\frac{1}{7}}$ în ordine crescătoare.

Vom face comparare de puteri cu aceeași bază, deci, mai întâi aducem numerele la forma de puteri cu bază 7 sau $\sqrt{7}$.

Dacă alegem baza 7:

$$a = (\sqrt{7})^{2 \cdot \frac{1}{3}} = \left(\sqrt{7}^2\right)^{\frac{1}{3}} = 7^{\frac{1}{3}}$$

$$b = \frac{1}{7^{-\frac{1}{5}}} = \frac{7^0}{7^{-\frac{1}{5}}} = 7^{0-\left(-\frac{1}{5}\right)} = 7^{\frac{1}{5}}$$

$$c = 49^{\frac{1}{7}} = (7^2)^{\frac{1}{7}} = 7^{\frac{2}{7}}$$

Cum baza puterii este 7, deci supraunitară, ordinea dintre exponenți se păstrează și între puteri (și reciproc). Vom compara exponenții $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}$ și $\frac{2}{7}$, aducând cele trei fracții la același numitor (105):

$$\frac{1}{3} = \frac{35}{105}; \frac{1}{5} = \frac{21}{105} \text{ și } \frac{2}{7} = \frac{30}{105}$$

Cum $21 < 30 < 35$, rezultă $\frac{21}{105} < \frac{30}{105} < \frac{35}{105}$ ceea ce este echivalent cu $\frac{1}{5} < \frac{2}{7} < \frac{1}{3}$, de unde deducem:

$$7^{\frac{1}{5}} < 7^{\frac{2}{7}} < 7^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow b < c < a.$$

Ordinea crescătoare a numereleor date este: b, c, a.

Dacă alegem baza $\sqrt{7}$:

$$a = (\sqrt{7})^{\frac{2}{3}}$$

$$b = \frac{1}{\left(\sqrt{7}^2\right)^{-\frac{1}{5}}} = \frac{\sqrt{7}^0}{(\sqrt{7})^{-\frac{2}{5}}} = (\sqrt{7})^{\frac{2}{5}}$$

$$c=(7^2)^{\frac{1}{7}}=7^{\frac{2}{7}}=\left(\sqrt{7}^2\right)^{\frac{2}{7}}=\left(\sqrt{7}\right)^{\frac{4}{7}}$$

Baza $\sqrt{7}$ este supraunitară, deci ordinea dintre exponenți se păstrează și între puteri (și reciproc). Comparăm exponenții:

$\frac{2}{5}<\frac{4}{7}<\frac{2}{3}\Leftrightarrow\left(\sqrt{7}\right)^{\frac{2}{5}}<\left(\sqrt{7}\right)^{\frac{4}{7}}<\left(\sqrt{7}\right)^{\frac{2}{3}}$, deci $b<c<a$.

2. Determinați numerele întregi m pentru care are loc inegalitatea: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m^2}{2}}\geq\frac{1}{4}$.

Inegalitatea se transformă în $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m^2}{2}}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^2$. Comparăm două puteri cu aceeași bază, $\frac{1}{2}$, care este subunitară, ceea ce înseamnă că ordinea dintre puteri se schimbă între exponenți (și reciproc).

Deci: $\frac{m^2}{2}\leq 2, m\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow m^2\leq 4, m\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow|m|\leq 2, m\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow m\in\{-2,-1,0,1,2\}$.

Puteri cu exponent irațional

Pentru buna înțelegere a noțiunii de putere cu exponent irațional pe care urmează să o introducem aici, ar trebui parcursă, din nou, lecția Aproximări ale numerelor reale.

Orice număr irațional x poate fi aproximat prin lipsă și prin adaos, aproximările fiind numere raționale. Pe de altă parte, numărul irațional x este cuprins (strict) între orice aproximare prin lipsă a lui și orice aproximare prin adaos a lui.

$$x_l<x<x_a,$$

unde x_l este aproximare prin lipsă a numărului irațional x, x_a este aproximare prin adaos a numărului irațional x, iar $x_l, x_a\in\mathbb{Q}$.

Definiție:
Fie $\boldsymbol{a}>0, a\neq 1$ și $\boldsymbol{x}$ un număr irațional. Numărul notat $\boldsymbol{a^x}$, însemnând puterea de exponent $\boldsymbol{x}$ a numărului $\boldsymbol{a}$ este unicul număr real cuprins între $\boldsymbol{a^{x_l}}$ și $\boldsymbol{a^{x_a}}$, oricare ar fi $\boldsymbol{x_l}$ - aproximare prin lipsă a numărului irațional $\boldsymbol{x}$, și oricare ar fi $\boldsymbol{x_a}$ - aproximare prin adaos a numărului irațional $\boldsymbol{x}$, cu $\boldsymbol{x_l}, \boldsymbol{x_a}\in\mathbb{Q}$.

Când spunem ”cuprins între” înțelegem inegalități stricte, dar trebuie să ținem cont de compararea puterilor cu exponenți raționali prezentată anterior.

Dacă $a \in (0,1)$ (bază subunitară), cum $x_l < x < x_a$, vom avea $a^{x_l} > a^x > a^{x_a}$.

Dacă $a \in (1,\infty)$ (bază supraunitară), cum $x_l < x < x_a$, vom avea $a^{x_l} < a^x < a^{x_a}$.

Observație: Prin convenție, $1^x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ și $0^x = 0, \forall x > 0$.

Atenție!

Nu se definește puterea cu exponent real oarecare a unui număr negativ!

Exemplu:

a) $a = 3 > 1,\ x = \sqrt{5} = 2{,}2360679775 \ldots \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

$\boldsymbol{x_l}$ aproximarea prin lipsă a numărului $\boldsymbol{\sqrt{5}}$	$\boldsymbol{3^{x_l}}$	Semnul dintre puteri	$\boldsymbol{3^{\sqrt{5}}}$	Semnul dintre puteri	$\boldsymbol{3^{x_a}}$	$\boldsymbol{x_a}$ aproximarea prin adaos a numărului $\boldsymbol{\sqrt{5}}$
2	3^2	$<$	$\boldsymbol{3^{\sqrt{5}}}$	$<$	3^3	3
2,2	$3^{2,2}$	$<$	$\boldsymbol{3^{\sqrt{5}}}$	$<$	$3^{2,3}$	2,3
2,23	$3^{2,23,}$	$<$	$\boldsymbol{3^{\sqrt{5}}}$	$<$	$3^{2,24}$	2,24
2,236	$3^{2,236}$	$<$	$\boldsymbol{3^{\sqrt{5}}}$	$<$	$3^{2,237}$	2,237
…	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**	**…**
Numărul $\boldsymbol{3^{\sqrt{5}}}$ este unicul număr real mai mare decât 3 ridicat la orice aproximare prin lipsă a lui $\boldsymbol{\sqrt{5}}$ și mai mic decât 3 ridicat la orice aproximare prin adaos a lui $\boldsymbol{\sqrt{5}}$						

b) $a = \frac{1}{3} \in (0,1)\ x = \sqrt{5} = 2{,}2360679775 \ldots \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

$\boldsymbol{x_l}$ aproximarea prin lipsă a numărului $\boldsymbol{\sqrt{5}}$	$\left(\boldsymbol{\frac{1}{3}}\right)^{\boldsymbol{x_l}}$	Semnul dintre puteri	$\left(\boldsymbol{\frac{1}{3}}\right)^{\sqrt{5}}$	Semnul dintre puteri	$\left(\boldsymbol{\frac{1}{3}}\right)^{\boldsymbol{x_a}}$	$\boldsymbol{x_a}$ aproximarea prin adaos a numărului $\boldsymbol{\sqrt{5}}$
2	$\left(\boldsymbol{\frac{1}{3}}\right)^2$	$>$	$\left(\boldsymbol{\frac{1}{3}}\right)^{\sqrt{5}}$	$>$	$\left(\boldsymbol{\frac{1}{3}}\right)^3$	3
2,2	$\left(\boldsymbol{\frac{1}{3}}\right)^{2,2}$	$>$	$\left(\boldsymbol{\frac{1}{3}}\right)^{\sqrt{5}}$	$>$	$\left(\boldsymbol{\frac{1}{3}}\right)^{2,3}$	2,3
2,23	$\left(\boldsymbol{\frac{1}{3}}\right)^{2,23,}$	$>$	$\left(\boldsymbol{\frac{1}{3}}\right)^{\sqrt{5}}$	$>$	$\left(\boldsymbol{\frac{1}{3}}\right)^{2,24}$	2,24
2,236	$\left(\boldsymbol{\frac{1}{3}}\right)^{2,236}$	$>$	$\left(\boldsymbol{\frac{1}{3}}\right)^{\sqrt{5}}$	$>$	$\left(\boldsymbol{\frac{1}{3}}\right)^{2,237}$	2,237

…	…	…	…	…	…	…
Numărul $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}}$ este unicul număr real care este mai mare decât $\frac{1}{3}$ ridicat la orice aproximare prin adaos a lui $\sqrt{5}$ și este mai mic decât $\frac{1}{3}$ ridicat la orice aproximare prin lipsă a lui $\sqrt{5}$.						

Operațiile cu puteri și proprietățile puterilor se extind și la puteri cu exponent real oarecare.

Operații cu puteri cu exponenți reali și proprietăți

Dacă a și b sunt numere strict pozitive, atunci:	
1. $a^x \cdot a^u = a^{x+u}, \forall x, u \in \mathbb{R}$.	Când înmulțim puteri cu aceeași bază și exponenți reali, copiem baza și adunăm exponenții.
2. $\frac{a^x}{a^u} = a^{x-u}, \forall x, u \in \mathbb{R}$.	Când împărțim puteri cu aceeași bază și exponenți reali, copiem baza și scădem exponenții.
3. $(a^x)^u = a^{xu}, \forall x, u \in \mathbb{R}$	Când ridicăm o putere cu exponent real la altă putere, copiem baza și înmulțim exponenții.
4. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x, \forall x \in \mathbb{R}$.	Exponentul real al unui produs se distribuie fiecărui factor din bază.
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}, \forall x \in \mathbb{R}$.	Exponentul real al unui raport se distribuie numărătorului și numitorului.
6. $a^x = a^u \Leftrightarrow x = u$.	Două puteri cu exponenți reali, de aceeași bază, sunt egale dacă și numai dacă exponenții lor sunt egali.
7. $a \in (0,1) : x \leq u \Leftrightarrow a^x \geq a^u$	Când baza este subunitară, ordinea dintre exponenți se schimbă între puteri (și invers: ordinea dintre puteri se schimbă între exponenți).
8. $a \in (1,\infty): x \leq u \Leftrightarrow a^x \leq a^u$	Când baza este supraunitară, ordinea dintre exponenți este aceeași cu ordinea puterilor.

Exemple:

Este o problemă de comparare a unor puteri cu aceeași bază, dat fiind că $\frac{1}{8} = 2^{-3}$. Cum baza 2 este supraunitară, ordinea dintre puteri se păstrează și între exponenți:

$$2^{\frac{y-1}{y+1}} \geq 2^{-3} \Leftrightarrow \frac{y-1}{y+1} \geq -3 \Leftrightarrow \frac{y-1}{y+1} + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{y-1+3y+3}{y+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4y+2}{y+1} \geq 0$$

Din tabelul de semn, obținem

$$y \in (-\infty, -1) \cup \left[-\frac{1}{2}, \infty\right)$$

y	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4y+2$		− − − −	−	− − − −	0	+ + + +	+
$y+1$		− − − −	0	+ + + +	+	+ + + +	+
$\frac{4y+2}{y+1}$		+ + + +	/	− − − −	0	+ + + +	+

2. Calculați $\left[\left(\sqrt{2}\right)^{1-\sqrt{3}}\right]^{1+\sqrt{3}}$.

Avem de efectuat ridicarea unei puteri cu exponent irațional la puterea $1+\sqrt{3}$, număr tot irațional, deci vom înmulți exponenții:

$$\left[\left(\sqrt{2}\right)^{1-\sqrt{3}}\right]^{1+\sqrt{3}} = \left(\sqrt{2}\right)^{(1-\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{3})} = \left(\sqrt{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{2}} = \frac{1}{2}$$

3. Ordonați, descrescător, numerele: $\left(\frac{1}{5}\right)^{\pi}$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{7}{2}}$ și $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{10}}$.

Fiind o problemă de comparare a puterilor cu aceeași bază, $\frac{1}{5}$, subunitară, deducem că ordinea dintre exponenți se va inversa între puteri.

$\pi \cong 3{,}14$; $\sqrt{10} \cong 3{,}16$ și $\frac{7}{2} = 3{,}5$

Comparând exponenții, obținem: $\pi < \sqrt{10} < \frac{7}{2}$ ceea ce este echivalent cu:

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{\pi} > \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{10}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{7}{2}}.$$

Ordinea descrescătoare a numerelor date este: $\left(\frac{1}{5}\right)^{\pi}$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{10}}$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{7}{2}}$.

Operațiile cu puteri cu exponenți reali și proprietățile lor vor fi utilizate foarte mult în capitolul de ecuații, în special la ecuații exponențiale.