MATEMATRIX
LECȚII DE MATEMATICĂ
PRÊT-À-PORTER

| Unitatea de învățare | Puteri și radicali |
| --- | --- |

Videoclip: Transpunerea unei situaţii din viaţa reală într-o problemă de matematică, evidenţiind necesitatea operaţiilor cu puteri, compararea acestora şi necesitatea introducerii noţiunii de radical de ordin $n$, unde $n$ este număr natural, mai mare sau egal ca 2.

Ce învăţăm din videoclip:

- **să transpunem** o situație cotidiană în limbaj matematic,
- **să rezolvăm** problema obținută,
- **să interpretăm** rezultatele.

Părinţii gemenilor Dora şi Doru au reuşit să cumpere o casă nouă, cu piscină în curte. Dar piscina nu este finisată. Are nevoie de pavaj de jur împrejur. Fostul proprietar le-a spus părinţilor, în grabă, că piscina are lăţimea cât dublul adâncimii, lungimea cât dublul lăţimii şi volumul de $40\ m^3$.

Dora şi Doru încearcă să calculeze rapid dimensiunile piscinei, pentru a se bucura cât mai repede de ea.

Iniţial s-au gândit să măsoare perimetrul suprafeţei dreptunghiulare, de la sol, a piscinei, cu pasul. Aşa că au alergat, au alergat, au alergat...până au realizat că pasul lor nu e totdeauna acelaşi, deci nu poate fi un calcul riguros. S-au oprit din alergat şi s-au gândit...

Cum piscina are forma unui paralelipiped dreptunghic, Dora şi Doru notează:

-adâncimea piscinei cu $a$,

-lăţimea piscinei cu $l$,

-lungimea piscinei cu $L$.

Din datele furnizate de fostul proprietar, ei deduc că:

$$l = 2a$$

$$L = 2l = 4a$$

Ştiau deja, din clasa a VIII-a, că volumul paralelipipedului dreptunghic este produsul celor 3 dimensiuni, deci $V = a \bullet l \bullet L$, deci $V = a \bullet 2a \bullet 4a = 8a^3$.

Au ajuns acum la rezolvarea unei ecuaţii.

$$8a^3 = 40 \; a^3 = 5 .$$

Nici Dora, nici Doru nu cunosc vreun număr care ridicat la puterea a treia să fie egal cu 5. Aşa că se gândesc la aproximări şi la comparări. Au încadrat numărul 5 între cuburile a două numere naturale consecutive: $1^3 < 5 < 2^3$. Cum $a^3 = 5$ şi $1^3 < a^3 < 2^3$, copiii deduc că $a$ este un număr cuprins între 1 şi 2. Dar între 1 şi 2 există o infinitate de numere reale. Care dintre ele, oare, ridicat la puterea a treia va fi egal cu 5?

Se întorc la prima inegalitate: $1 < 5 < 8$ şi studiază distanţele dintre numerele comparate:

Între 1 şi 5 distanţa este de 4 unităţi de măsură, iar între 5 şi 8 distanţa este de 3 unităţi de măsură. Cum 5 este mai apropiat de 8 decât de 1, copiii se gândesc că numărul $a$ va fi mai apropiat de 2 decât de 1.

Cum mijlocul intervalului $[1, \; 2]$, este 1,5, iar $a$ este mai aproape de 2 decât de 1, copiii aleg numărul 1,7, îl ridică la puterea a treia şi-l compară cu 5.

$$1,7^3 = 4,913 \quad 4,913 < 5$$

Încercând să strângă intervalul în jurul lui 5 pentru o aproximare cât mai bună, copiii aleg un număr puţin mai mare decât 1,7, şi anume 1,71. Calculează $1,71^3 = 5,000211$ rezultatul fiind îmbucurător.

Au găsit, până acum

$$1,7^3 < a^3 < 1,71^3 = 5,000211$$

Deci $a$ este un număr cuprins între 1,7 şi 1,71.

Dat fiind că pavajul trebuie să acopere toată marginea piscinei, dar nici nu vor să risipească material, Doru şi Dora decid că numărul $1,71$ este cel care aproximează destul de bine adâncimea piscinei. Vor lucra cu aproximarea lui $a$ : $a \cong 1,71$.

De aici, lăţimea piscinei va fi $l \cong 2 \cdot 1,71 \; m = 3,42 \; m$, iar lungimea ei va fi $L \cong 2 \cdot 3,42 \; m = 6,84 \; m$.

Perimetrul care trebuie pavat va fi $P = 2l + 2L = 2\,(3,42 + 6,84) = 2 \cdot 10,26 = 20,52 \; m$.

Calculul a fost lung şi destul de greoi, mai ales că a trebuit să ”încerce” cu diverse numere, ridicîndu-le la puterea a treia, apropierea de numărul dorit (5).

Întrebarea este ce este $a\ (\cong 1,71)$ pentru numărul 5? Fiindcă, în realitate copii nu l-au aflat pe $a$ ci au găsit o aproximare convenabilă a acestui număr. Şi asta nu pentru că nu sunt suficient de deştepţi, ci pentru că numărul $a$, soluţia ecuaţiei $a^3 = 5$, reprezintă radicalul de ordin 3 al numărului 5, care este un număr iraţional. Îl vom nota:

$$\sqrt[3]{5}.$$

Ecuaţii ca: $x^4 = 8$ sau $x^5 = -20$, sau altele de acest fel îşi vor găsi rezolvarea după introducerea şi studierea radicalului de ordin $n$, dintr-un număr pozitiv, unde $n$ este un număr natural, mai mare sau egal ca 2.

$$\sqrt[n]{x},\ n \in N, n \geq 2$$