

Breviar teoretic

Operații cu numere complexe

După introducerea formei algebrice a numerelor complexe putem spune că sub forma algebrică două numere complexe $z = a + ib, w = c + di, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ au suma $z + w = (a + bi) + (c + di) = a + b + (c + d)i$, iar produsul lor este $z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac - bd + (ad + bc)i$.

Proprietățile adunării numerelor complexe

1. Asociativitatea : $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$;
2. Comutativitatea: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
3. 0 este element neutru: $z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1, \forall z_1 \in \mathbb{C}$;
4. Orice număr complex are un opus: oricare $z = a + bi \in \mathbb{C}$ există $-z = -a - bi \in \mathbb{C}$ astfel încât $z + (-z) = -z + z = 0$.

Proprietățile înmulțirii numerelor complexe

1. Asociativitatea: $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3), \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$;
2. Comutativitatea: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;
3. 1 este element neutru: $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z, \forall z \in \mathbb{C}$;
4. Orice număr complex nenul are un invers: oricare $z \in \mathbb{C}^*$ există $z^{-1} \in \mathbb{C}$ astfel încât $z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1$.

Înmulțirea este distributivă față de adunare

$$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3, \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

Exemple

1. $(1 + 2i) + (2 + 3i) = 3 + 5i$;
2. $(1 + 2i) \cdot (2 + 3i) = 3 + 5i$.

Puterile numărului i

Observăm că $i^3 = -i, i^4 = 1$.

Obținem că $i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i, \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemple

1. $i^{2024} = (i^4)^{506} = 1$;
2. Observând că $i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$, putem calcula prin grupare $i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{200} = 0$;
3. Observând că $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$, putem calcula $(1 + i)^{2021} = ((1 + i)^2)^{1010} (1 + i) = (2i)^{1010} (1 + i) = 2^{1010} (1 + i)$.

Matematrix
Matematrix