9.1.1a

Unitatea de învățare: Mulțimea numerelor reale:operații algebrice cu numere reale, ordonarea numerelor reale, aproximări, operații cu intervale

Aproximări

A aproxima un număr real înseamnă a găsi o valoare/un număr apropiat de cel dat, în vederea unei estimări mai rapide a unor mărimi.

Aproximare $\begin{cases} \text{prin lipsă} = \text{un număr mai mic decât cel dat} \\ \text{prin adaos} = \text{un număr mai mare decât cel dat} \end{cases}$. De aici deducem că orice număr real este mai mare decât orice aproximare a lui prin lipsă și este mai mic decât orice aproximare a lui prin adaos.

Dacă vorbim de numere întregi, atunci aproximările prin lipsă sau prin adaos se fac la nivelul unităților, zecilor, sutelor, miilor, zecilor de mii și așa mai departe.

Exemplu:

Numărul⟶8.456.378			
	Aproximare prin lipsă		Aproximare prin adaos
La ordinul unităților (cu o eroare mai mică decât 1=10^0)	8.456.377 *am scăzut o unitate*	8.456.378	8.456.379 *am adăugat o unitate*
La ordinul zecilor (cu o eroare mai mică decât 10=10^1)	8.456.370 *cifra unităților devine 0, celelate cifre se păstrează*	8.456.378	8.456.380 *am adăugat o unitate la cifra zecilor, cifra unităților devine 0, celelate cifre se păstrează*
La ordinul sutelor (cu o eroare mai mică decât 100=10^2)	8.456.300 *cifrele unităților și zecilor devin 0, celelalte cifre se păstrează*	8.456.378	8.456.400 *am adăugat o unitate la cifra sutelor, cifrele unităților și zecilor devin 0, celelalte cifre se păstrează*
La ordinul miilor (cu o	8.456.000 *cifrele unităților,*	8.456.378	8.457.000 *am adăugat o unitate la*

eroare mai mică decât 1000=10^3)	*zecilor și sutelor devin 0, celelalte cifre se păstrează*		*cifra miilor, cifrele unităților, zecilor și sutelor devin 0, celelalte cifre se păstrează*
………………	………..	8.456.378	………..
La ordinul milioanelor (cu o eroare mai mică decât 1.000.000=10^6)	8.000.000 *cifrele unităților, zecilor, sutelor, miilor, zecilor de mii și sutelor de mii devin 0, prima cifră se păstrează*	8.456.378	9.000.000 *am adăugat o unitate la cifra milioanelor, cifrele unităților, zecilor, sutelor, miilor, zecilor de mii și sutelor de mii devin 0*

Dar, pentru numărul 8.456.378, avem și alte aproximări:

8.456.375 este o aproximare prin lipsă

8.456.381 este o aproximare prin adaos

dar acestea nu se încadrează în categoriile de aproximări exemplificate mai sus.

Definiție: Numărul A se numește aproximare prin lipsă a numărului x, cu o eroare mai mică decât p (p număr real pozitiv), dacă $A \leq x \leq A + p$ (sau $0 \leq x - A \leq p$)
Definiție: Numărul B se numește aproximare prin adaos a numărului x, cu o eroare mai mică decât p (p număr real pozitiv), dacă $B - p \leq x \leq B$ (sau $0 \leq B - x \leq p$)

Definiție: Numărul C se numește aproximare a numărului x, cu o eroare mai mică decât p (p număr real pozitiv), dacă $C - p \leq x \leq C + p$ (sau $|x - C| \leq p$)

Exemplu: $x = 8.456.378$, $A = 8.456.375$ și $B = 8.456.381$. Avem $A \leq x \leq B$

$0 \leq 8.456.378 - 8.456.\mathbf{375} = 3$, deci $0 \leq x - A \leq 3$ de unde deducem că A este o aproximare prin lipsă a lui x cu o eroare mai mică decât 3.

$0 \leq 8.456.381 - 8.456.378 = 3$, deci $0 \leq B - x \leq 3$ de unde deducem că B este o aproximare prin adaos a lui x cu o eroare mai mică decît 3.

Un număr real are totdeauna o scriere sub formă de

- fracție zecimală cu un număr finit de zecimale (acestea sunt numere raționale)

- fracție zecimală cu un număr infinit de zecimale care se repetă începând cu o anumită zecimală (fracție zecimală periodică sau periodică mixtă-sunt numere raționale)
- fracție zecimală cu un număr infinit de zecimale care nu se repetă (sunt numerele iraționale)

Cele mai utilizate aproximări ale numerelor reale sunt aproximările cu o eroare mai mică decât $10^{-n}=\frac{1}{10^n}$, unde $n$este un număr natural.

Dacă $x=a_0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$ este un număr pozitiv scris ca fracție zecimală, atunci aproximările cu o eroare mai mică decât 10^{-n} vor fi:

$A=a_0,a_1a_2\ldots a_n$ - aproximarea prin lipsă (este număr rațional)

$B=a_0,a_1a_2\ldots a_n+\frac{1}{10^n}$ -aproximarea prin adaos (este număr rațional)

Exemplu:

Numărul⟶$\pi=3.14159265358979323846264338327950288\ldots$			
	Aproximare prin lipsă		Aproximare prin adaos
Cu o eroare mai mică decât 1=10^0	*3*	π	*4*
Cu o eroare mai mică decât 10^{-1}	*3.1*	π	*3.2*
Cu o eroare mai mică decât 10^{-2}	*3.14*	π	3.15
Cu o eroare mai mică decât 10^{-3}	*3.141*	π	3.142
....	....	π	....
Cu o eroare mai mică decât 10^{-6}	3.141592	π	3.141593

Dacă $x=a_0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$ este un număr negativ scris ca fracție zecimală, atunci aproximările cu o eroare mai mică decât 10^{-n} vor fi:

$A=a_0,a_1a_2\ldots a_n-\frac{1}{10^n}$ - aproximarea prin lipsă (este număr rațional)

$B = a_0, a_1 a_2 \dots a_n$ -aproximarea prin adaos (este număr rațional)

Numărul⟶ $-\sqrt{5} = -2.2360679775 \dots$			
	Aproximare prin lipsă		Aproximare prin adaos
Cu o eroare mai mică decât 1=10^0	*-3*	$-\sqrt{5}$	*-2*
Cu o eroare mai mică decât 10^{-1}	*-2.3*	$-\sqrt{5}$	*-2.2*
Cu o eroare mai mică decât 10^{-2}	*-2.24*	$-\sqrt{5}$	-2.23
Cu o eroare mai mică decât 10^{-3}	*-2.237*	$-\sqrt{5}$	-2.236
....	....	......	....
Cu o eroare mai mică decât 10^{-6}	-2.236068	$-\sqrt{5}$	-2.236067

Trunchiere de ordin n a numărului real x = aproximare zecimală prin lipsă cu o eroare mai mică decât 10^{-n}.
Rotunjire la a n-a zecimală a numărului real x = numărul cel mai apropiat de x dintre aproximarea prin lipsă și aproximarea prin adaos cu o eroare mai mică decât 10^{-n}.

Exemple:

Numărul	n	Aproximare prin lipsă cu eroare mai mică decât 10^{-n}	Aproximare prin adaos cu eroare mai mică decât 10^{-n}	Trunchiere	Rotunjire
15,12345678...	4	15,1234	15,1235	15,1234	15,12345
-6,567382903...	8	-6,56738291	-6,56738290	-6,56738291	-6,56738290
11,73240782...	3	11,732	11,733	11,732	11,732

-4,(12)	7	-4,1212122	-4,1212121	-4,1212122	-4,1212121
23,45(64)646	6	23,456464	23,456465	23,456464	23,456465